**第二讲导数的应用**

id:2147490999;FounderCES

题组1应用导数研究函数的单调性

1*.*[2017浙江,7,4分]函数*y=f*(*x*)的导函数*y=f* *'*(*x*)的图象如图3*-*2*-*1所示,则函数*y=f*(*x*)的图象可能是()

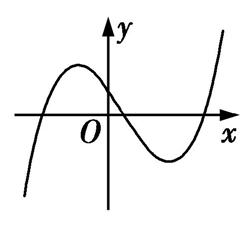
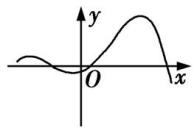
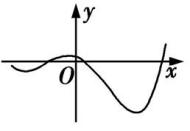
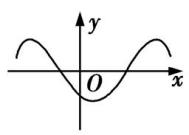
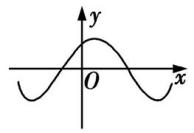


图3*-*2*-*1

A.  B. C.  D. 

2*.*[2016全国卷Ⅰ,12,5分]若函数*f*(*x*)*=x-*sin 2*x+a*sin *x*在(*-∞*,*+∞*)上单调递增,则*a*的取值范围是()

A.[-1,1] B.[-1,] C.[-,] D.[*-*1,*-*]

3*.*[2015新课标全国*Ⅰ*,12,5分][理]设函数*f*(*x*)*=*e*x*(2*x-*1)*-ax+a*,其中*a<*1,若存在唯一的整数*x*0使得*f*(*x*0)*<*0,则*a*的取值范围是()

A.[*-*,1)B.[*-*,)C.[,)D.[,1)

4*.*[2016山东,20,13分][理]已知*f*(*x*)*=a*(*x-*ln *x*)*+*,*a*∈R*.*

(Ⅰ)讨论*f*(*x*)的单调性;

(Ⅱ)当*a=*1时,证明*f*(*x*)*>f* *'*(*x*)*+*对于任意的*x*∈[1,2]成立*.*

题组2应用导数研究函数的极值与最值

5*.*[2017全国卷Ⅱ,11,5分][理]若*x=-*2是函数*f*(*x*)*=*(*x*2*+ax-*1)e*x-*1的极值点,则 *f*(*x*)的极小值为()

A.-1 B.-2e-3 C.5e-3 D.1

6*.*[2014新课标全国Ⅱ,12,5分][理]设函数*f*(*x*)*=*sin*.*若存在*f*(*x*)的极值点*x*0满足*+*[*f*(*x*0)]2*<m*2,则*m*的取值范围是()

A.(-∞,-6)∪(6,+∞) B.(-∞,-4)∪(4,+∞) C.(-∞,-2)∪(2,+∞) D.(-∞,-1)∪(1,+∞)

7*.*[2013辽宁,12,5分][理]设函数*f*(*x*)满足*x*2*f* *'*(*x*)*+*2*xf*(*x*)*=*,*f*(2)*=*,则*x>*0时,*f*(*x*)()

A.有极大值,无极小值

B.有极小值,无极大值

C.既有极大值又有极小值

D.既无极大值也无极小值

8*.*[2017北京,19,13分][理]已知函数*f*(*x*)*=*e*x*cos *x-x.*

(Ⅰ)求曲线*y=f*(*x*)在点(0,*f*(0))处的切线方程;

(Ⅱ)求函数*f*(*x*)在区间[0,]上的最大值和最小值*.*

9*.*[2015山东,21,14分][理]设函数*f*(*x*)*=*ln(*x+*1)*+a*(*x*2*-x*),其中*a*∈R*.*

(Ⅰ)讨论函数*f*(*x*)极值点的个数,并说明理由;

(Ⅱ)若∀*x>*0,*f*(*x*)≥0成立,求*a*的取值范围*.*

题组3生活中的优化问题

10*.*[2013重庆,20,12分]某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池(不计厚度)*.*设该蓄水池的底面半径为*r* m,高为*h* m,体积为*V* m3*.*假设建造成本仅与表面积有关,侧面的建造成本为100元*/*m2,底面的建造成本为160元*/*m2,该蓄水池的总建造成本为12 000π 元(π为圆周率)*.*

(Ⅰ)将*V*表示成*r*的函数*V*(*r*),并求该函数的定义域;

(Ⅱ)讨论函数*V*(*r*)的单调性,并确定*r*和*h*为何值时该蓄水池的体积最大*.*

题组4导数与函数的综合

11*.*[2014新课标全国Ⅰ,11,5分][理]已知函数*f*(*x*)*=ax*3*-*3*x*2*+*1,若*f*(*x*)存在唯一的零点*x*0,且*x*0*>*0,则*a*的取值范围是()

A.(2,+∞) B.(-∞,-2) C.(1,+∞) D.(-∞,-1)

12*.*[2015四川,15,5分][理]已知函数*f*(*x*)*=*2*x*,*g*(*x*)*=x*2*+ax*(其中*a*∈R)*.*对于不相等的实数*x*1,*x*2,设*m=*,*n=.*现有如下命题:

①对于任意不相等的实数*x*1,*x*2,都有*m>*0;

②对于任意的*a*及任意不相等的实数*x*1,*x*2,都有*n>*0;

③对于任意的*a*,存在不相等的实数*x*1,*x*2,使得*m=n*;

④对于任意的*a*,存在不相等的实数*x*1,*x*2,使得*m=-n.*

其中的真命题有(写出所有真命题的序号)*.*

13*.*[2017全国卷Ⅲ,21,12分][理]已知函数*f*(*x*)*=x-*1*-a*ln *x.*

(1)若*f*(*x*)≥0,求*a*的值;

(2)设*m*为整数,且对于任意正整数*n*,(1*+*)(1*+*)·…·(1*+*)*<m*,求*m*的最小值*.*

14*.*[2017 江苏,20,16分][理]已知函数*f*(*x*)*=x*3*+ax*2*+bx+*1(*a>*0,*b*∈R)有极值,且导函数*f* *'*(*x*)的极值点是*f*(*x*)的零点*.*(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)

(1)求*b*关于*a*的函数关系式,并写出定义域;

(2)证明:*b*2*>*3*a*;

(3)若*f*(*x*),*f* *'*(*x*)这两个函数的所有极值之和不小于*-*,求*a*的取值范围*.*

15*.*[2016全国卷Ⅱ,21,12分][理](Ⅰ)讨论函数*f*(*x*)*=*e*x*的单调性,并证明当*x>*0时,(*x-*2)e*x+x+*2*>*0;

(Ⅱ)证明:当*a*∈[0,1)时,函数*g*(*x*)*=*(*x>*0)有最小值*.*设*g*(*x*)的最小值为*h*(*a*),求函数*h*(*a*)的值域*.*

16*.*[2015新课标全国Ⅰ,21,12分][理]已知函数*f*(*x*)*=x*3*+ax+*,*g*(*x*)*=-*ln *x.*

(Ⅰ)当*a*为何值时,*x*轴为曲线*y=f*(*x*)的切线;

(Ⅱ)用min{*m*,*n*}表示*m*,*n*中的最小值,设函数*h*(*x*)*=*min{*f*(*x*),*g*(*x*)}(*x>*0),讨论*h*(*x*)零点的个数*.*

id:2147491069;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018浙江省温州市一模,6]已知函数*f*(*x*)的导函数*f* *'*(*x*)的图象如图3*-*2*-*2所示,则函数*f*(*x*)的图象可能是()

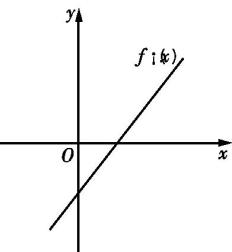
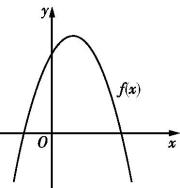
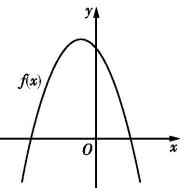
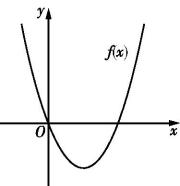
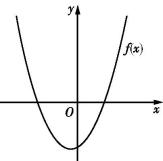


图3*-*2*-*2

A.  B. C.  D. 

2*.*[2018成都市高三摸底测试,7]已知函数*f*(*x*)*=x*3*-ax*在(*-*1,1)上单调递减,则实数*a*的取值范围为()

A*.*(1,*+∞*) B*.*[3,*+∞*)

C.(*-∞*,1] D*.*(*-∞*,3]

3*.*[2017南昌市三模,10]已知函数*f* *'*(*x*)是函数*f*(*x*)的导函数,*f*(1)*=*,对任意实数*x*,都有*f*(*x*)*-*

*f* *'*(*x*)*>*0,则不等式*f*(*x*)*<*e*x-*2的解集为()

A.(*-∞*,e) B.(1,*+∞*) C.(1,e) D.(e,*+∞*)

4*.*[2017石家庄市二模,12]若函数*f*(*x*)*=x*3*+*2*ax*2*-*3*bx+*3*b*在(0,1)上存在极小值点,则实数*b*的取值范围是()

A.(-1,0] B.(-1,+∞) C.[0,+∞) D.(1,+∞)

5*.*[2017郑州市第三次质量预测,12]设函数*f*(*x*)满足2*x*2*f*(*x*)*+x*3*f* *'*(*x*)*=*e*x*,*f*(2)*=.*则 *x*∈[2,*+∞*)时,*f*(*x*)的最小值为()

A. B. C. D.

6*.*[2018辽宁省五校联考,21] 已知函数*f*(*x*)*=*2ln *x+x*2*-*2*ax*(*a>*0)*.*

(1)讨论函数*f*(*x*)的单调性;

(2)若函数*f*(*x*)有两个极值点*x*1,*x*2(*x*1*<x*2),且*f*(*x*1)*-f*(*x*2)≥*-*2ln 2恒成立,求*a*的取值范围*.*

7*.*[2017长春市高三第四次质量监测,21]已知函数*f*(*x*)*=x*2e*ax.*

(1)当*a<*0时,讨论函数*f*(*x*)的单调性;

(2)在(1)条件下,求函数*f*(*x*)在区间[0,1]上的最大值;

(3)设函数*g*(*x*)*=*2e*x-*,求证:当*a=*1时,∀*x*∈(0,1),*g*(*x*)*-xf*(*x*)*>*2恒成立*.*

**B组提升题**

8*.*[2018河南省南阳一中三模,12]关于函数*f*(*x*)*=+*ln *x*,下列说法错误的是()

A*.x=*2是*f*(*x*)的极小值点

B*.*函数*y=f*(*x*)*-x*有且只有1个零点

C.存在正实数*k*,使得*f*(*x*)*>kx*恒成立

D.对任意两个正实数*x*1,*x*2,且*x*2*>x*1,若*f*(*x*1)*=f*(*x*2),则*x*1*+x*2*>*4

9*.*[2018河北“五个一名校联盟”高三第二次考试,16]已知函数*f*(*x*)*=x+a*ln *x*(*a>*0),若∀*x*1,*x*2∈(,1)(*x*1≠*x*2),*|f*(*x*1)*-f*(*x*2)*|>|-|*,则正数*a*的取值范围是*.*

10*.*[2018西安八校联考,21]已知函数*f*(*x*)*=x*,*g*(*x*)*=λf*(*x*)*+*sin *x*(*λ*∈R)在区间[*-*1,1]上单调递减*.*

(1)求*λ*的最大值;

(2)若*g*(*x*)*<t*2*+λt+*1在[*-*1,1]上恒成立,求*t*的取值范围;

(3)讨论关于*x*的方程*=x*2*-*2e*x+m*的解的个数*.*

11*.*[2017甘肃省张掖市高三一诊,21]设函数*f*(*x*)*=-a*ln *x.*

(1)当*a=*1时,求曲线*y=f*(*x*)在点(1,*f*(1))处的切线方程;

(2)求函数*f*(*x*)的单调区间和极值;

(3)若函数*f*(*x*)在区间(1,e2]内恰有两个零点,试求*a*的取值范围*.*

**答案**

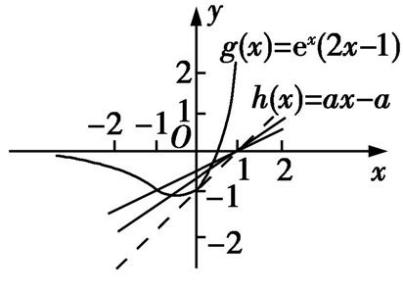
id:2147497146;FounderCES

1*.*D根据题意,已知导函数的图象有三个零点,且每个零点的两边导函数值的符号相反,因此函数*f*(*x*)在这些零点处取得极值,排除A,B;记导函数 *f* *'*(*x*)的零点从左到右分别为*x*1,*x*2,*x*3,又在(*-∞*,*x*1)上*f* *'*(*x*)*<*0,在(*x*1,*x*2)上*f* *'*(*x*)*>*0,所以函数*f*(*x*)在(*-∞*,*x*1)上单调递减,排除C,选D*.*

2*.*C函数*f*(*x*)*=x-*sin 2*x+a*sin *x*在(*-∞*,*+∞*)上单调递增,等价于*f* *'*(*x*)*=*1*-*cos 2*x+a*cos *x=*

*-*cos2*x+a*cos *x+*≥0在(*-∞*,*+∞*)上恒成立*.*设cos *x=t*,则*g*(*t*)*=-t*2*+at+*≥0在[*-*1,1]上恒成立,所以解得*-*≤*a*≤*.*故选C*.*

3*.*D由题意可知存在唯一的整数*x*0,使得(2*x*0*-*1)*<ax*0*-a*,设*g*(*x*)*=*e*x*(2*x-*1),*h*(*x*)*=ax-a*,由*g'*(*x*)*=*e*x*(2*x+*1)可知*g*(*x*)在(*-∞*,*-*)上单调递减,在(*-*,*+∞*)上单调递增,作出*g*(*x*)与*h*(*x*)的大致图象如图所示,故即所以≤*a<*1,故选D*.*



4*.*(Ⅰ)*f*(*x*)的定义域为(0,*+∞*),

*f* *'*(*x*)*=a--+=.*

当*a*≤0时,*x*∈(0,1)时,*f* *'*(*x*)*>*0,*f*(*x*)单调递增,

*x*∈(1,*+∞*)时,*f* *'*(*x*)*<*0,*f*(*x*)单调递减*.*

当*a>*0时,*f* *'*(*x*)*=*(*x-*)(*x+*)*.*

*①* 0*<a<*2时,*>*1,

当*x*∈(0,1)或*x*∈(,*+∞*)时,*f* *'*(*x*)*>*0,*f*(*x*)单调递增,

当*x*∈(1,)时,*f* *'*(*x*)*<*0,*f*(*x*)单调递减*.*

*②a=*2时,*=*1,在*x*∈(0,*+∞*)内, *f* *'*(*x*)≥0,*f*(*x*)单调递增*.*

*③a>*2时,0*<<*1,

当*x*∈(0,)或*x*∈(1,*+∞*)时,*f* *'*(*x*)*>*0,*f* (*x*)单调递增,

当*x*∈(,1)时,*f* *'*(*x*)*<*0,*f* (*x*)单调递减*.*

综上所述,当*a*≤0时,*f*(*x*)在(0,1)内单调递增,在(1,*+∞*)内单调递减;

当0*<a<*2时,*f*(*x*)在(0,1)内单调递增,在(1,)内单调递减,在(,*+∞*)内单调递增;

当*a=*2时,*f*(*x*)在(0,*+∞*)内单调递增;

当*a>*2时,*f*(*x*)在(0,)内单调递增,在(,1)内单调递减,在(1,*+∞*)内单调递增*.*

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,*a=*1时,

*f*(*x*)*-f* *'*(*x*)*=x-*ln *x+-*(1*--+*)*=x-*ln *x++--*1,*x*∈[1,2]*.*

设*g*(*x*)*=x-*ln *x*,*h*(*x*)*=+--*1,*x*∈[1,2]*.*

则*f*(*x*)*-f* *'*(*x*)*=g*(*x*)*+h*(*x*)*.*

由*g'*(*x*)*=*≥0,可得*g*(*x*)≥*g*(1)*=*1,当且仅当*x=*1时取得等号,*h'*(*x*)*=*,

设*φ*(*x*)*=-*3*x*2*-*2*x+*6,则*φ*(*x*)在*x*∈[1,2]上单调递减,

因为*φ*(1)*=*1,*φ*(2)*=-*10,

所以∃*x*0∈(1,2),使得*x*∈(1,*x*0)时,*φ*(*x*)*>*0,*x*∈(*x*0,2)时,*φ*(*x*)*<*0*.*

所以*h*(*x*)在(1,*x*0)内单调递增,在(*x*0,2)内单调递减*.*

由*h*(1)*=*1,*h*(2)*=*,可得*h*(*x*)≥*h*(2)*=*,

当且仅当*x=*2时取得等号*.*

所以*f*(*x*)*-f* *'*(*x*)*>g*(1)*+h*(2)*=*,

即*f*(*x*)*>f* *'*(*x*)*+*对于任意的*x*∈[1,2]成立*.*

5.A因为*f*(*x*)*=*(*x*2*+ax-*1)e*x-*1,所以*f* *'*(*x*)*=*(2*x+a*)e*x-*1*+*(*x*2*+ax-*1)e*x-*1*=*[*x*2*+*(*a+*2)*x+a-*1]e*x-*1*.*因为*x=-*2是函数*f*(*x*)*=*(*x*2*+ax-*1)e*x-*1的极值点,所以*-*2是*x*2*+*(*a+*2)*x+a-*1*=*0的根,所以*a=-*1,*f* *'*(*x*)

*=*(*x*2*+x-*2)e*x-*1*=*(*x+*2)(*x-*1)e*x-*1*.*令*f* *'*(*x*)*>*0,解得*x<-*2或*x>*1,令*f* *'*(*x*)*<*0,解得*-*2*<x<*1,所以*f*(*x*)在(*-∞*,*-*2)上单调递增,在(*-*2,1)上单调递减,在(1,*+∞*)上单调递增,所以当*x=*1时,*f*(*x*)取得极小值,且*f*(*x*)极小值*=f*(1)*=-*1,故选A*.*

6*.*C由正弦型函数的图象可知:*f*(*x*)的极值点*x*0满足*f*(*x*0)*=±*,则*=+k*π(*k*∈Z),从而得*x*0*=*(*k+*)*m*(*k*∈Z)*.*所以不等式*+<m*2,即(*k+*)2*m*2*+*3*<m*2,变形得*m*2[1*-*(*k+*)2]*>*3,其中*k*∈Z*.*由题意,存在整数*k*使得不等式*m*2[1*-*(*k+*)2]*>*3成立*.*当*k*≠*-*1且*k*≠0时,必有(*k+*)2*>*1,此时不等式显然不能成立,故*k=-*1或*k=*0,此时,不等式即*m*2*>*3,解得*m<-*2或*m>*2*.*故选C*.*

7*.*D由题意知[*x*2*f*(*x*)]*'=*,令*g*(*x*)*=x*2*f*(*x*),则*g'*(*x*)*=*,且*f*(*x*)*=*,因此*f* *'*(*x*)*==.*令*h*(*x*)*=*e*x-*2*g*(*x*),则*h'*(*x*)*=*e*x-*2*g'*(*x*)*=*e*x-=*,所以*x>*2时,*h'*(*x*)*>*0,0*<x<*2时,*h'*(*x*)*<*0*.*从而有*h*(*x*)≥*h*(2)*=*0,即*f* *'*(*x*)≥0,所以当*x>*0时,*f*(*x*)是单调递增的,*f*(*x*)无极大值也无极小值*.*故选D*.*

8*.*(Ⅰ)因为*f*(*x*)*=*e*x*cos *x-x*,所以*f* *'*(*x*)*=*e*x*(cos *x-*sin *x*)*-*1,*f* *'*(0)*=*0*.*

又*f*(0)*=*1,所以曲线*y=f*(*x*)在点(0,*f*(0))处的切线方程为*y=*1*.*

(Ⅱ)设*h*(*x*)*=*e*x*(cos *x-*sin *x*)*-*1,则

*h'*(*x*)*=*e*x*(cos *x-*sin *x-*sin *x-*cos *x*)*=-*2e*x*sin *x.*

当*x*∈(0,)时,*h'*(*x*)*<*0,

所以*h*(*x*)在区间[0,]上单调递减*.*

所以对任意*x*∈(0,]有*h*(*x*)*<h*(0)*=*0,即*f* *'*(*x*)*<*0*.*

所以函数*f*(*x*)在区间[0,]上单调递减*.*

因此*f*(*x*)在区间[0,]上的最大值为*f*(0)*=*1,最小值为*f*()*=-.*

9*.*(Ⅰ)由题意知函数*f*(*x*)的定义域为(*-*1,*+∞*),

*f* *'*(*x*)*=+a*(2*x-*1)*=*,

令*g*(*x*)*=*2*ax*2*+ax-a+*1,*x*∈(*-*1,*+∞*)*.*

(1)当*a=*0时,*g*(*x*)*=*1,

此时*f* *'*(*x*)*>*0,函数*f*(*x*)在(*-*1,*+∞*)单调递增,无极值点;

(2)当*a>*0时,*Δ=a*2*-*8*a*(1*-a*)*=a*(9*a-*8)*.*

*①*当0*<a*≤时,*Δ*≤0,*g*(*x*)≥0,

*f* *'*(*x*)≥0,函数*f*(*x*)在(*-*1,*+∞*)单调递增,无极值点;

*②*当*a>*时,*Δ>*0,

设方程2*ax*2*+ax-a+*1*=*0的两根为*x*1,*x*2(*x*1*<x*2),

因为*x*1*+x*2*=-*,

所以*x*1*<-*,*x*2*>-.*

由*g*(*-*1)*=*1*>*0,可得*-*1*<x*1*<-.*

所以当*x*∈(*-*1,*x*1)时,*g*(*x*)*>*0,*f* *'*(*x*)*>*0,函数*f*(*x*)单调递增;

当*x*∈(*x*1,*x*2)时,*g*(*x*)*<*0,*f* *'*(*x*)*<*0,函数*f*(*x*)单调递减;

当*x*∈(*x*2,*+∞*)时,*g*(*x*)*>*0,*f* *'*(*x*)*>*0,函数*f*(*x*)单调递增;

因此,函数有两个极值点*.*

(3)当*a<*0时,*Δ>*0,

由*g*(*-*1)*=*1*>*0,可得*x*1*<-*1*.*

当*x*∈(*-*1,*x*2)时,*g*(*x*)*>*0,*f* *'*(*x*)*>*0,函数*f*(*x*)单调递增;

当*x*∈(*x*2,*+∞*)时,*g*(*x*)*<*0,*f* *'*(*x*)*<*0,函数*f*(*x*)单调递减;

所以函数有一个极值点*.*

综上所述,

当*a<*0时,函数*f*(*x*)有一个极值点;

当0≤*a*≤时,函数*f*(*x*)无极值点;

当*a>*时,函数*f*(*x*)有两个极值点*.*

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,

(1)当0≤*a*≤时,函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递增,

因为*f*(0)*=*0,

所以*x*∈(0,*+∞*)时,*f*(*x*)*>*0,符合题意;

(2)当*<a*≤1时,由*g*(0)≥0,得*x*2≤0,

所以函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递增*.*

又*f*(0)*=*0,所以*x*∈(0,*+∞*)时,*f*(*x*)*>*0,符合题意;

(3)当*a>*1时,由*g*(0)*<*0,可得*x*2*>*0*.*

所以*x*∈(0,*x*2)时,函数*f*(*x*)单调递减,

因为*f*(0)*=*0,

所以*x*∈(0,*x*2)时,*f*(*x*)*<*0,不合题意;

(4)当*a<*0时,设*h*(*x*)*=x-*ln(*x+*1)*.*

因为*x*∈(0,*+∞*)时,*h'*(*x*)*=*1*-=>*0,

所以*h*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递增,

因此当*x*∈(0,*+∞*)时,*h*(*x*)*>h*(0)*=*0,

即ln(*x+*1)*<x.*

可得*f*(*x*)*<x+a*(*x*2*-x*)*=ax*2*+*(1*-a*)*x*,

当*x>*1*-*时,*ax*2*+*(1*-a*)*x<*0,

此时*f*(*x*)*<*0,不合题意*.*

综上所述,*a*的取值范围是[0,1]*.*

10*.*(Ⅰ)因为蓄水池侧面的总成本为100*×*2π*rh=*200π*rh*,底面的总成本为160π*r*2元,所以蓄水池的总成本为(200π*rh+*160π*r*2)元*.*

根据题意得200π*rh+*160π*r*2*=*12 000π,所以*h=*(300*-*4*r*2),

从而*V*(*r*)*=*π*r*2*h=*(300*r-*4*r*3)*.*

由*h>*0,且*r>*0,可得0*<r<*5,故函数*V*(*r*)的定义域为(0,5)*.*

(Ⅱ)由(*Ⅰ*)知*V*(*r*)*=*(300*r-*4*r*3),

故*V'*(*r*)*=*(300*-*12*r*2)*.*

令*V'*(*r*)*=*0,解得*r*1*=*5,*r*2*=-*5(*r*2*=-*5不在定义域内,舍去)*.*

当*r*∈(0,5)时,*V'*(*r*)*>*0,故*V*(*r*)在(0,5)上为增函数;

当*r*∈(5,5)时,*V'*(*r*)*<*0,故*V*(*r*)在(5,5)上为减函数*.*

由此可知,*V*(*r*)在*r=*5处取得最大值,此时*h=*8,即当*r=*5,*h=*8时,该蓄水池的体积最大*.*

11*.*B当*a=*0时,*f*(*x*)*=-*3*x*2*+*1有两个零点,不符合题意,故*a*≠0*.f* *'*(*x*)*=*3*ax*2*-*6*x=*3*x*(*ax-*2),令*f* *'*(*x*)*=*0,得*x=*0或*x=*,由题意得*a<*0且*f*()*>*0,解得*a<-*2,选B*.*

12*.*①④因为*f*(*x*)*=*2*x*在R上是单调递增的,所以对于不相等的实数*x*1,*x*2,*m=>*0恒成立,*①*正确;因为*g*(*x*)*=x*2*+ax*,所以*n==x*1*+x*2*+a*,正负不定,*②*错误;由*m=n*,整理得*f*(*x*1)*-g*(*x*1)*=f*(*x*2)*-g*(*x*2)*.*令函数*p*(*x*)*=f*(*x*)*-g*(*x*)*=*2*x-x*2*-ax*,则*p'*(*x*)*=*2*x*ln 2*-*2*x-a*,令*t*(*x*)*=p'*(*x*),则*t'*(*x*)*=*2*x*(ln 2)2*-*2,又*t'*(1)*=*2(ln 2)2*-*2*<*0,*t'*(3)*=*8(ln 2)2*-*2*>*0,从而存在*x*0∈(1,3),使得*t'*(*x*0)*=*(ln 2)2*-*2*=*0,于是*p'*(*x*)有极小值*p'*(*x*0)*=*ln 2*-*2*x*0*-a=-*2log2*-a*,所以存在*a=-*2log2,使得*p'*(*x*0)*=>*0,此时*p*(*x*)在R上单调递增,故不存在不相等的实数*x*1,*x*2,使得*f*(*x*1)*-g*(*x*1)*=f*(*x*2)*-g*(*x*2),不满足题意,*③*错误;由*m=-n*,得*f* *'*(*x*)*=-g'*(*x*),即*-a=*2*x*ln 2*+*2*x.*设*h*(*x*)*=*2*x*ln 2*+*2*x*,则*h'*(*x*)*=*2*x*(ln 2)2*+*2*>*0,所以*h*(*x*)在R上是单调递增的,且当*x*→*+∞*时,*h*(*x*)→*+∞*,当*x*→*-∞*时,*h*(*x*)→*-∞*,所以对于任意的*a*,*y=-a*与*y=h*(*x*)的图象一定有交点,*④*正确*.*

13*.*(1)*f*(*x*)的定义域为(0,*+∞*)*.*

*①*若*a*≤0,因为*f*()*=-+a*ln 2*<*0,所以不满足题意;

*②*若*a>*0,由*f* *'*(*x*)*=*1*-=*知,当*x*∈(0,*a*)时,*f* *'*(*x*)*<*0;当*x*∈(*a*,*+∞*)时,*f* *'*(*x*)*>*0*.*所以*f*(*x*)在(0,*a*)单调递减,在(*a*,*+∞*)单调递增*.*故*x=a*是*f*(*x*)在(0,*+∞*)的唯一最小值点*.*

由于*f*(1)*=*0,所以当且仅当*a=*1时,*f*(*x*)≥0*.*

故*a=*1*.*

(2)由(1)知当*x*∈(1,*+∞*)时,*x-*1*-*ln *x>*0*.*

令*x=*1*+*得ln(1*+*)*<.*从而

ln(1*+*)*+*ln(1*+*)*+*…*+*ln(1*+*)*<++*…*+=*1*-<*1*.*

故(1*+*)(1*+*)…(1*+*)*<*e*.*

而(1*+*)(1*+*)(1*+*)*>*2,所以*m*的最小值为3*.*

14*.*(1)由*f*(*x*)*=x*3*+ax*2*+bx+*1,得*f* *'*(*x*)*=*3*x*2*+*2*ax+b=*3(*x+*)2*+b-.*

当*x=-*时,*f* *'*(*x*)有极小值*b-.*

因为*f* *'*(*x*)的极值点是*f*(*x*)的零点,

所以*f*(*-*)*=-+-+*1*=*0,又*a>*0,故*b=+.*

因为*f*(*x*)有极值,故*f* *'*(*x*)*=*0有实根,从而*b-=*(27*-a*3)≤0,即*a*≥3*.*当*a=*3时,*f* *'*(*x*)*>*0(*x*≠*-*1),故*f*(*x*)在R上是增函数,*f*(*x*)没有极值;当*a>*3时,*f* *'*(*x*)*=*0有两个相异的实根*x*1*=*,*x*2*=.*列表如下:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (*-∞*,*x*1) | *x*1 | (*x*1,*x*2) | *x*2 | (*x*2,*+∞*) |
| *f* *'*(*x*) | *+* | 0 | *-* | 0 | *+* |
| *f*(*x*) | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

故*f*(*x*)的极值点是*x*1,*x*2*.*

从而*a>*3*.*

因此*b=+*,定义域为(3,*+∞*)*.*

(2)由(1)知,*=+.*

设*g*(*t*)*=+*,则*g'*(*t*)*=-=.*

当*t*∈(,*+∞*)时,*g'*(*t*)*>*0,从而*g*(*t*)在(,*+∞*)上单调递增*.*

因为*a>*3,所以*a>*3,故*g*(*a*)*>g*(3)*=*,即*>.*

因此*b*2*>*3*a.*

(3)由(1)知,*f*(*x*)的极值点是*x*1,*x*2,且*x*1*+x*2*=-a*,*+=.*

从而*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=+a+bx*1*+*1*++a+bx*2*+*1*=*(3*+*2*ax*1*+b*)*+*(3*+*2*ax*2*+b*)*+a*(*+*)*+b*(*x*1*+x*2)*+*2*=-+*2*=*0*.*

记*f*(*x*),*f* *'*(*x*)所有极值之和为*h*(*a*),

因为*f* *'*(*x*)的极值为*b-=-a*2*+*,

所以*h*(*a*)*=-a*2*+*,*a>*3*.*

因为*h'*(*a*)*=-a-<*0,于是*h*(*a*)在(3,*+∞*)上单调递减*.*

因为*h*(6)*=-*,于是*h*(*a*)≥*h*(6),故*a*≤6*.*

因此*a*的取值范围为(3,6]*.*

15*.*(Ⅰ)*f*(*x*)的定义域为(*-∞*,*-*2)∪(*-*2,*+∞*)*.*

*f* *'*(*x*)*==*≥0,

当且仅当*x=*0时,*f* *'*(*x*)*=*0,所以*f* (*x*)在(*-∞*,*-*2),(*-*2,*+∞*)上单调递增*.*

因此当*x*∈(0,*+∞*)时,*f*(*x*)*>f*(0)*=-*1*.*

所以(*x-*2)e*x>-*(*x+*2),(*x-*2)e*x+x+*2*>*0*.*

(*Ⅱ*)*g'*(*x*)*==*(*f*(*x*)*+a*)*.*

由(*Ⅰ*)知,*f*(*x*)*+a*单调递增*.*对任意的*a*∈[0,1), *f*(0)*+a=a-*1*<*0, *f*(2)*+a=a*≥0*.*因此,存在唯一*xa*∈(0,2],使得*f*(*xa*)*+a=*0,即*g'*(*xa*)*=*0*.*

当0*<x<xa*时, *f*(*x*)*+a<*0,*g'*(*x*)*<*0,*g*(*x*)单调递减;

当*x>xa*时,*f*(*x*)*+a>*0,*g'*(*x*)*>*0,*g*(*x*)单调递增*.*

因此*g*(*x*)在*x=xa*处取得最小值,最小值为

*g*(*xa*)*===.*

于是*h*(*a*)*=*,由()*'=>*0,得单调递增*.*

所以,由*xa*∈(0,2],得*=<h*(*a*)*=*≤*=.*

因为单调递增,对任意的*λ*∈(,],存在唯一的*xa*∈(0,2],*a=-f*(*xa*)∈[0,1),使得*h*(*a*)*=λ*,所以*h*(*a*)的值域是(,]*.*

综上,当*a*∈[0,1)时,*g*(*x*)有最小值*h*(*a*),*h*(*a*)的值域是(,]*.*

16*.*(Ⅰ)设曲线*y=f*(*x*)与*x*轴相切于点(*x*0,0),则*f*(*x*0)*=*0,*f* *'*(*x*0)*=*0,即

解得*x*0*=*,*a=-.*

因此,当*a=-*时,*x*轴为曲线*y=f*(*x*)的切线*.*

(Ⅱ)当*x*∈(1,*+∞*)时,*g*(*x*)*=-*ln *x<*0,从而*h*(*x*)*=*min{*f*(*x*),*g*(*x*)}≤*g*(*x*)*<*0,故*h*(*x*)在(1,*+∞*)上无零点*.*

当*x=*1时,若*a*≥*-*,则*f*(1)*=a+*≥0,*h*(1)*=*min{*f*(1),*g*(1)}*=g*(1)*=*0,故*x=*1是*h*(*x*)的零点;若*a<-*,则 *f*(1)*<*0,*h*(1)*=*min{*f*(1),*g*(1)}*=f*(1)*<*0,故*x=*1不是*h*(*x*)的零点*.*

当*x*∈(0,1)时,*g*(*x*)*=-*ln *x>*0*.*所以只需考虑*f*(*x*)在(0,1)上的零点个数*.*

(i)若*a*≤*-*3或*a*≥0,则*f* *'*(*x*)*=*3*x*2*+a*在(0,1)上无零点,故*f*(*x*)在(0,1)上单调*.*而*f*(0)*=*,*f*(1)*=a+*,所以当*a*≤*-*3时,*f*(*x*)在(0,1)上有一个零点;当*a*≥0时,*f*(*x*)在(0,1)上没有零点*.*

(ii)若*-*3*<a<*0,则*f*(*x*)在(0,)上单调递减,在(,1)上单调递增,故在(0,1)中,当*x=*时,*f*(*x*)取得最小值,最小值为*f*()*=+.*

*①*若*f*()*>*0,即*-<a<*0,*f*(*x*)在(0,1)上无零点;

*②*若*f*()*=*0,即*a=-*,则*f*(*x*)在(0,1)上有唯一零点;

*③*若*f*()*<*0,即*-*3*<a<-*,由于*f*(0)*=*,*f*(1)*=a+*,所以当*-<a<-*时,*f*(*x*)在(0,1)上有两个零点;当*-*3*<a*≤*-*时,*f*(*x*)在(0,1)上有一个零点*.*

综上,当*a>-*或*a<-*时,*h*(*x*)有一个零点;当*a=-*或*a=-*时,*h*(*x*)有两个零点;当*-<a<-*时,*h*(*x*)有三个零点*.*

id:2147497168;FounderCES

**A组基础题**

1*.*C由导函数*f* *'*(*x*)的图象可知,函数*y=f*(*x*)先减再增,可排除选项A,B;又*f* *'*(*x*)*=*0的根为正数,即*y=f*(*x*)的极值点为正数,所以可排除选项D,选C.

2*.*B∵*f*(*x*)*=x*3*-ax*,∴*f* *'*(*x*)*=*3*x*2*-a.*又*f*(*x*)在(*-*1,1)上单调递减,∴3*x*2*-a*≤0在(*-*1,1)上恒成立,∴*a*≥3,故选B*.*

3*.*B设*g*(*x*)*=*,则*g'*(*x*)*==.*∵对任意实数*x*,都有*f*(*x*)*-f* *'*(*x*)*>*0,∴*g'*(*x*)*<*0,即*g*(*x*)为R上的减函数*.*又*g*(1)*==*,由不等式*f*(*x*)*<*e*x-*2,得*<*e*-*2*=*,即*g*(*x*)*<g*(1)*.*∵*g*(*x*)为R上的减函数,∴*x>*1,∴不等式*f*(*x*)*<*e*x-*2的解集为(1,*+∞*)*.*故选B*.*

4*.*B若函数*f*(*x*)*=x*3*+*2*ax*2*-*3*bx+*3*b*在(0,1)上存在极小值点,则*f* *'*(*x*)*=*3*x*2*+*4*ax-*3*b*在(0,1)上有两个零点或一个零点在(0,1)上,一个零点在(*-∞*,0]上*.*

当导函数 *f* *'*(*x*)的一个零点在(0,1)上,一个零点在(*-∞*,0]上时,需满足∴必会存在*a*使得*f* *'*(1)*>*0,所以当*b*≥0时,函数*f*(*x*)*=x*3*+*2*ax*2*-*3*bx+*3*b*在(0,1)上存在极小值点;当导函数*f* *'*(*x*)在(0,1)上有两个零点时,即

∴可得*-*1*<b<*0*.*综上,*b*∈(*-*1,*+∞*)*.*故选B*.*

5*.*D由已知,得2*xf*(*x*)*+x*2*f* *'*(*x*)*=*,即[*x*2*f*(*x*)]*'=*,因此令*F*(*x*)*=x*2*f*(*x*),则*F'*(*x*)*=*,*F*(2)*=*4*f*(2)*=.*又由已知得*f* *'*(*x*)*==*,此时再令*φ*(*x*)*=*e*x-*2*F*(*x*),则*φ'*(*x*)*=*e*x-*2*F'*(*x*)*=*e*x-*2·*=*,所以当0*<x<*2时,*φ'*(*x*)*<*0,当*x>*2时,*φ'*(*x*)*>*0,所以*φ*(*x*)min*=φ*(2)*=*e2*-*2*F*(2)*=*0,所以当*x*∈[2,*+∞*)时,*f* *'*(*x*)≥0,函数 *f*(*x*)在[2,*+∞*)上单调递增,*f*(*x*)min*=f*(2)*=*,故选D*.*

6*.*(1)由题意知,函数*f*(*x*)的定义域是(0,*+∞*),

*f* *'*(*x*)*=*,令*x*2*-ax+*1*=*0,则*Δ=a*2*-*4,

*①*当0*<a*≤2时,*Δ*≤0,*f* *'*(*x*)≥0恒成立,

函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递增;

*②*当*a>*2时,*Δ>*0,方程*x*2*-ax+*1*=*0有两个不同的实根,分别设为*x*3,*x*4,不妨令*x*3*<x*4,

则*x*3*=*,*x*4*=*,此时0*<x*3*<x*4,

因为当*x*∈(0,*x*3)时,*f* *'*(*x*)*>*0,当*x*∈(*x*3,*x*4)时,*f* *'*(*x*)*<*0,当*x*∈(*x*4,*+∞*)时,*f* *'*(*x*)*>*0,

所以函数*f*(*x*)在(0,)上单调递增,在(,)上单调递减,在(,*+∞*)上单调递增*.*

(2)由(1)得*f*(*x*)在(*x*1,*x*2)上单调递减,*x*1*+x*2*=a*,*x*1·*x*2*=*1,

则*f*(*x*1)*-f*(*x*2)*=*2ln*+*(*x*1*-x*2)(*x*1*+x*2*-*2*a*)*=*2ln*+=*2ln*+-*,

令*t=*,则0*<t<*1,*f*(*x*1)*-f*(*x*2)*=*2ln *t+-t*,

令*g*(*t*)*=*2ln *t+-t*(0*<t<*1),则*g'*(*t*)*=-<*0,

故*g*(*t*)在(0,1)上单调递减且*g*()*=-*2ln 2,

故*g*(*t*)*=f*(*x*1)*-f*(*x*2)≥*-*2ln 2*=g*(),即0*<t*≤,

而*a*2*=*(*x*1*+x*2)2*=++*2*=t++*2,其中0*<t*≤,

令*h*(*t*)*=t++*2,*t*∈(0,],

所以*h'*(*t*)*=*1*-<*0在*t*∈(0,]上恒成立,

故*h*(*t*)*=t++*2在(0,]上单调递减,

从而*a*2≥,

故*a*的取值范围是[,*+∞*)*.*

7*.*(1)由题意知*f'*(*x*)*=*e*ax*(*ax*2*+*2*x*),令*f'*(*x*)*=*0,可得*x=*0或*x=-.*

又*a<*0,则由*f'*(*x*)*<*0,得*x<*0或*x>-*,由*f'*(*x*)*>*0,得0*<x<-.*所以函数*f*(*x*)在(*-∞*,0)和(*-*,*+∞*)上单调递减,在(0,*-*)上单调递增*.*

(2)在(1)条件下,当*-*≥1,即*-*2≤*a<*0时,*f*(*x*)在[0,1]上单调递增,

则*f*(*x*)的最大值为*f*(1)*=*e*a*;

当*-<*1,即*a<-*2时,*f*(*x*)在[0,*-*)上单调递增,在(*-*,1]上单调递减,

则*f*(*x*)的最大值为*f*(*-*)*=*e*-*2*.*

(3)要证*g*(*x*)*-xf*(*x*)*>*2,即证(2*-x*3)e*x>*2*+*,

令*h*(*x*)*=*(2*-x*3)e*x*,

则*h'*(*x*)*=*(*-x*3*-*3*x*2*+*2)e*x=-*e*x*(*x+*1)(*x*2*+*2*x-*2),

又*x*∈(0,1),易知在(0,1)上*h*(*x*)存在极大值点,又*h*(0)*=*2,*h*(1)*=*e,则*h*(*x*)在(0,1)上恒大于2,而2*+*在(0,1)上恒小于2,因此*g*(*x*)*-xf*(*x*)*>*2在(0,1)上恒成立*.*

**B组提升题**

8*.*C由题意知,*f* *'*(*x*)*=*,∴函数*f*(*x*)在区间(0,2)上单调递减,在区间(2,*+∞*)上单调递增,

∴*x=*2是*f*(*x*)的极小值点,即A正确;

∵*y=f*(*x*)*-x=+*ln *x-x*,∴*y'=<*0,

∴函数*y*在(0,*+∞*)上单调递减,又当*x*趋近于0时,*y*趋近于*+∞*

∴函数*y=f*(*x*)*-x*有且只有1个零点,即B正确;

由*f*(*x*)*>kx*,可得*k<+*,

令*g*(*x*)*=+*

则*g'*(*x*)*=*

令*h*(*x*)*=-*4*+x-x*ln *x*,则*h'*(*x*)*=-*ln *x*,

∴函数*h*(*x*)在区间(0,1)上单调递增,在区间(1,*+∞*)上单调递减,

∴*h*(*x*)≤*h*(1)*<*0,∴*g'*(*x*)*<*0,

∴函数*g*(*x*)*=+*在区间(0,*+∞*)上单调递减,函数*g*(*x*)无最小值,

∴不存在正实数*k*,使得*f*(*x*)*>kx*恒成立,即C不正确;

对任意两个正实数*x*1,*x*2,且*x*2*>x*1,

函数在区间(0,2)上单调递减,在(2,*+∞*)上单调递增,

若*f*(*x*1)*=f*(*x*2),则*x*1*+x*2*>*4,D正确*.*选C*.*

9*.*[,*+∞*)由*f*(*x*)*=x+a*ln *x*(*a>*0),得当*x*∈(,1)时,*f* *'*(*x*)*=*1*+>*0,*f*(*x*)在(,1)上单调递增,

不妨设*x*1*>x*2,

则*|f*(*x*1)*-f*(*x*2)*|>|-|*,即*f*(*x*1)*-f*(*x*2)*>-*,

*f*(*x*1)*+>f*(*x*2)*+*,

令*g*(*x*)*=f*(*x*)*+*,则*g*(*x*)在(,1)上单调递增,所以*g'*(*x*)*=*1*+-*≥0在(,1)上恒成立,

≥*-*1,即*a*≥*-x*在(,1)上恒成立,

令*h*(*x*)*=-x*,*x*∈(,1),则*h'*(*x*)*=-*1*-<*0,*h*(*x*)单调递减,故*a*≥,正数*a*的取值范围是[,*+∞*)*.*

10*.*(1)∵*f*(*x*)*=x*,

∴*g*(*x*)*=λf*(*x*)*+*sin *x=λx+*sin *x*,

又*g*(*x*)在[*-*1,1]上单调递减,

∴*g'*(*x*)*=λ+*cos *x*≤0在[*-*1,1]上恒成立,

∴*λ*≤(*-*cos *x*)min*=-*1*.*

故*λ*的最大值为*-*1*.*

(2)在[*-*1,1]上,*g*(*x*)max*=g*(*-*1)*=-λ-*sin 1,

∴只需*t*2*+λt+*1*>-λ-*sin 1恒成立,

即(*t+*1)*λ+t*2*+*sin 1*+*1*>*0(*λ*≤*-*1)恒成立,

令*h*(*λ*)*=*(*t+*1)*λ+t*2*+*sin 1*+*1(*λ*≤*-*1),要使*h*(*λ*)*>*0恒成立,

则需

∴

又*t*2*-t+*sin 1*>*0恒成立,∴*t*≤*-*1,故*t*的取值范围为(*-∞*,*-*1]*.*

(3)*==x*2*-*2e*x+m*,

令*f*1(*x*)*=*,*f*2(*x*)*=x*2*-*2e*x+m*,

∵*f*1*'*(*x*)*=*,∴当*x*∈(0,e)时,*f*1*'*(*x*)*>*0,即*f*1(*x*)单调递增;

当*x*∈[e,*+∞*)时,*f*1*'*(*x*)≤0,即*f*1(*x*)单调递减*.*

∴*f*1(*x*)max*=f*1(e)*=*,

又*f*2(*x*)*=*(*x-*e)2*+m-*e2,

∴当*m-*e2*>*,即*m>*e2*+*时,方程无解;

当*m-*e2*=*,即*m=*e2*+*时,方程有一个解;

当*m-*e2*<*,即*m<*e2*+*时,方程有两个解*.*

11*.*(1)当*a=*1时,*f*(*x*)*=-*ln *x*,则*f* *'*(*x*)*=x-*,

所以*f* *'*(1)*=*0,又*f*(1)*=*,

所以曲线*y=f*(*x*)在点(1,*f*(1))处的切线方程为*y-=*0*×*(*x-*1),即*y=.*

(2)由*f*(*x*)*=-a*ln *x*,得*f* *'*(*x*)*=x-=*(*x>*0)*.*

*①*当*a*≤0时,*f* *'*(*x*)*>*0,函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递增,函数既无极大值,也无极小值;

*②*当*a>*0时,由*f* *'*(*x*)*=*0,得*x=*或*x=-*(舍去)*.*

于是,当*x*变化时,*f* *'*(*x*)与*f*(*x*)的变化情况如下表:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | (0,) |  | (,*+∞*) |
| *f* *'*(*x*) | *-* | 0 | *+* |
| *f* (*x*) | ↘ |  | ↗ |

所以函数*f*(*x*)的单调递减区间是(0,),单调递增区间是(,*+∞*)*.*

函数*f*(*x*)在*x=*处取得极小值*f*()*=*,无极大值*.*

综上可知,当*a*≤0时,函数*f*(*x*)的单调递增区间为(0,*+∞*),函数*f*(*x*)既无极大值也无极小值;

当*a>*0时,函数*f*(*x*)的单调递减区间是(0,),单调递增区间为(,*+∞*),函数*f*(*x*)有极小值,无极大值*.*

(3)当*a*≤0时,由(2)知函数*f*(*x*)在区间(0,*+∞*)上单调递增,故函数*f*(*x*)在区间(1,e2]内至多有一个零点,不合题意*.*

当*a>*0时,由(2)知,当*x*∈(0,)时,函数*f*(*x*)单调递减;当*x*∈(,*+∞*)时,函数*f*(*x*)单调递增,函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)上的最小值为*f*()*=.*

若函数*f*(*x*)在区间(1,e2]内恰有两个零点,则需满足

即整理得所以e*<a*≤*.*

故所求*a*的取值范围为(e,]*.*